بضرب المعادلة الأولى من المعادلات المعطاة فى 2 والثانية فى 3 والجمع نحصل على $7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12$ وهذه غير متآلفة مع المعادلة الثالثة المعطاة أى مع $7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -4$ وعلى ذلك فإن مجموعة المعادلات غير متآلفة .

هندسياً فإن المعادلتين الأوليين تمثلان مستويين يتقاطعان فى خط مستقيم . المعادلة الثالثة تمثل مستوياً يوازى هذا الخط . من الناحية النظرية فإن المستويات تتقابل فى نقطة فى مالا نهاية . وهذا يمكن أن يفسر لنا النتيجة (١) .

١٥ – ٢٩ حل

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$$

فى هذه الحالة فإن التطبيق المباشر لقاعدة كرامر يعطى

$$x_1 = \frac{0}{0}, \quad x_2 = \frac{0}{0}, \quad x_3 = \frac{0}{0}$$

يمكن من الناحية النظرية $0/0$ أن تمثل أى عدد وبذلك فإن النتيجة توضح واقع الأمر أن المجموعة لها عدد لا نهائى من الحلول .

بضرب المعادلة الأولى فى 2 والثانية فى 3 وبالجمع نحصل على المعادلة الثالثة . وعلى ذلك فإن المعادلة الثالثة يمكن الحصول عليها من المعادلتين الأوليين وعلى ذلك ليس هناك حاجة إليها . يقال لمجموعة المعادلات أنها **غير مستقلة** أو بصورة أدق **غير مستقلة خطياً** .

هندسياً فإن المستويين الممثلين بالمعادلتين الأوليين تتقاطعان فى خط مستقيم . المستوى الممثل بالمعادلة الثالثة يمر بهذا الخط .

للحصول على حلول ممكنة ، نعطى قيما مختلفة للمتغير x_3 مثلا . وعلى ذلك إذا كان $x_3 = 1$ فإن $x_1 = \frac{17}{9}$ ، $x_2 = \frac{4}{9}$ ويكون لدينا نقطة على خط التقاطع إحداثياتها $(\frac{17}{9}, \frac{4}{9}, 1)$ وبالمثل يمكن الحصول على الحلول الأخرى .

١٥ – ٣٠ حل

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

الحل : قاعدة كرامر تعطى الحل (انظر المسألة ١٠ – ٨)

$$x_1 = \frac{0}{35} = 0, \quad x_2 = \frac{0}{35} = 0, \quad x_3 = \frac{0}{35} = 0$$

وعلى ذلك فإن الحل الوحيد هو الحل الصفرى .

هندسياً هذه المعادلات تمثل ثلاثة مستويات تتقاطع عند النقطة $(0, 0, 0)$.

١٥ – ٣١ حل

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

التطبيق المباشر لقاعدة كرامر يعطى

$$x_1 = \frac{0}{0}, \quad y_1 = \frac{0}{0}, \quad z_1 = \frac{0}{0}$$

وهذه توضح حقيقة وجود عدد لانهائى من الحلول بجانب الحل الصفرى الواضح وهوأن $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. مثل هذه الحلول يمكن إيجادها بإعطاء قيم مختلفة للمقدار x_3 كما فى المسألة ١٥ – ٢٩ . لاحظ أننا نحصل على المعادلة الثالثة بإضافة ضعف المعادلة الأولى إلى ثلاثة أمثال المعادلة الثانية . وعلى ذلك فالمعادلات غير مستقلة .

١٥ – ٣٢ ماهى قيم k حتى يكون لمجموعة المعادلات

$$\begin{cases} 2x + ky + z = 0 \\ (k-1)x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

حلول غير صفرية ؟

الحل : بتطبيق مباشر لقاعدة كرامر . يكون لدينا

$$x = \frac{0}{\Delta}, \quad y = \frac{0}{\Delta}, \quad z = \frac{0}{\Delta}$$

وحينئذ إذا كانت $\Delta \neq 0$ فإنه يكون للمجموعة الحل الصفرى $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ ولكى يكون للمجموعة حل غير صفرى يجب أن يكون $\Delta = 0$ أى

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{أو} \quad 9k - 9 - 4k(k-1) = 0$$

بالحل نجد أن $k = 1, 9/4$

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية :

١٥ – ٣٣ أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

الطريقة الأولى :

إذا كانت $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ فيجب أن نعتبر المعادلة $AX = \lambda X$ أى

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

أو

$$\begin{pmatrix} 5x_1 + 7x_2 - 5x_3 \\ 4x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

بمساواة العناصر المتناظرة فى هذه المصفوفات نجد أن

$$\begin{aligned} (5-\lambda)x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 0 \\ (4-\lambda)x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - (3+\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

ويكون لهذه المجموعة حل غير صفرى إذا كان

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (٢)$$

إن مفكوك هذا المحدد يعطى

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \quad \text{أو} \quad (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

وعلى ذلك فإن القيم الذاتية هى $\lambda = 1, 2, 3$

الطريقة الثانية :

يمكننا أن نكتب $AX = \lambda X$ على الصورة $AX = \lambda I X$ أو $(A - \lambda I)\ X = 0$ حيث I ، 0 هما مصفوفة الوحدة والمصفوفة الصفرية .

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

تكون الحلول غير الصفرية موجودة إذا كان محدد $(A - \lambda I) = 0$ ويمكننا أن نستمر بعد ذلك كما فى الطريقة الأولى . لاحظ أن المعادلة (٢) يمكن كتابتها على الفور بطرح λ من كل عنصر من عناصر A القطرية .

١٥ – ٣٤ (أ) أوجد المتجهات الذاتية المناظرة للقيم الذاتية للمصفوفة A مسألة ١٥ – ٣٣ ، (ب) عين فئة من وحدة المتجهات الذاتية .

الحل : (أ) مناظراً للمقدار $\lambda = 1$ المعادلات (١) من المسألة ١٥ – ٣٣ تصبح :

$$\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

وبالتعبير عن x_1 ، x_3 بدلالة x_2 نجد أن $x_1 = 2x_2$ ، $x_3 = 3x_2$ وبذلك يكون المتجه الذاتى هو

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{أو باختصار} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ذاتى هو مضاعف (ثابت) من هذا المتجه .

بالمثل مناظراً للقيمة $\lambda = 2$ فإن المعادلات (١) من المسألة ١٥ – ٣٣ ، تؤدى إلى $x_3 = 2x_2$ ، $x_1 = x_2$ والتى بدورها تؤدى إلى المتجه الذاتى .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{أو باختصار} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وأخيراً عندما $\lambda = 3$ نحصل على $x_3 = x_2$ ، $x_1 = -x_2$ والتى تعطى المتجه الذاتى :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{أو باختصار} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ب) وحدة المتجهات الذاتية لها الخاصية أن طولها 1 أى أن مجموع مربعات مركباتها يساوى 1 . لحصول على مثل هذه المتجهات الذاتية نقسم كل متجه على الجذر التربيعى لمجموع مربعات المركبات . وعلى ذلك فإن المتجهات السابقة تصبح على الترتيب .

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

١٥ ــ ٣٥ أوجد (أ) القيم الذاتية . (ب) المتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(أ) القيم الذاتية هى حلول $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ والتى تعطى $\lambda = 1, 4, 6$

(ب) من المعادلة $(A - \lambda I)\, X = 0$ نحصل على

$$\begin{aligned} (2-\lambda)x_1 - 2x_3 &= 0 \\ (4-\lambda)x_2 &= 0 \\ -2x_1 + (5-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

مناظراً للقيمة $\lambda = 1$ نجد المتجه الذاتى $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

مناظراً للقيمة $\lambda = 4$ نجد المتجه الذاتى $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ومناظراً للقيمة $\lambda = 6$ نجد المتجه الذاتى $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

١٥ ــ ٣٦ أوجد (أ) القيمة الذاتية . (ب) المتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

الحل : (أ) بالطريقة المعتادة ، القيم الذاتية هى حلول

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$ أو $$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

إذن

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$$

(ب) المعادلات التى تحدد المتجهات الذاتية تتعين من

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

أى

$$\left.\begin{aligned} (\cos\theta - \lambda)x_1 - (\sin\theta)x_2 &= 0 \\ (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

باستخدام الجذر $\lambda = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ نجد من (أ) أن $x_2 = -i\,x_1$ وعلى ذلك فالمتجه الذاتى المناظر هو

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -ix_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$ أو باختصار $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

باستخدام الجذر $\lambda = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ نجد أن $x_2 = ix_1$ وعلى ذلك فالمتجه المناظر هو

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ix_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$ أو باختصار $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

نظريات على القيم الذاتية والمتجهات الذاتية :

١٥ – ٣٧ أثبت أن القيم الذاتية لمصفوفة هيرميتية (أو مصفوفة متماثلة حقيقية) تكون حقيقية .

الحـل : بفرض أن A مصفوفة هيرميتية ، λ قيمة ذاتية . إذن من التعريف يوجد متجه ذاتى غير صفرى X بحيث أن

$$AX = \lambda X$$

بالضرب فى $\bar{X}^T$

$$\bar{X}^T AX = \lambda \bar{X}^T X \qquad (١)$$

بأخذ المرافق

$$X^T \bar{A}\bar{X} = \bar{\lambda} X^T \bar{X} \qquad (٢)$$

بأخذ المدور وباستخدام المعادلتين الثانية والثالثة فى (٥) صفحة ٤٤٢ نجد أن

$$\bar{X}^T \bar{A}^T X = \bar{\lambda}\bar{X}^T X \qquad (٣)$$

الآن حيث أن A هيرميتية $\bar{A}^T = A$ فإن (٣) تصبح

$$\bar{X}^T AX = \bar{\lambda}\bar{X}^T X \qquad (٤)$$

بطرح (٤) من (١) نحصل بذلك على :

$$(\lambda - \bar{\lambda})\bar{X}^T X = 0$$

وحيث أن $\bar{X}^T X$ لايمكن أن تساوى صفراً ينتج أن $\bar{\lambda} = \lambda$ أو أن λ يجب أن تكون حقيقية .

١٥ – ٣٨ أثبت أن المتجهات الذاتية لمصفوفة هيرميتية (أو مصفوفة حقيقية متماثلة) والتى تنتمى إلى قيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة .

الحل : نفرض أن X_1 ، X_2 هى متجهات ذاتية منتمية للقيم الذاتية λ_1 ، λ_2 ثم بفرض أن المصفوفة هى A يكون لدينا :

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \quad AX_2 = \lambda_2 X_2 \qquad (١)$$

بضرب هذه فى $\bar{X}_2^T$ ، $\bar{X}_1^T$ على الترتيب نجد أن :

$$\bar{X}_1^T AX_2 = \lambda_2 \bar{X}_1^T X_2 \quad ، \quad \bar{X}_2^T AX_1 = \lambda_1 \bar{X}_2^T X_1 \qquad (٢)$$

بأخذ المرافق للمعادلة الأولى فى (٢) حيث λ_1 حقيقية نجد أن :

$$X_2^T \bar{A}\bar{X}_1 = \lambda_1 X_2^T \bar{X}_1 \qquad (٣)$$

الآن بأخذ مدور (٣)

$$\bar{X}_1^T \bar{A}^T X_2 = \lambda_1 \bar{X}_1^T X_2 \qquad (٤)$$

بما أن A هيرميتية أى أن $\bar{A}^T = A$ فإن (٤) تصبح :

$$\bar{X}_1^T A X_2 = \lambda_1 \bar{X}_1^T X_2$$

بطرح هذه من المعادلة الثانية من المعادلات (٢)

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{X}_1^T X_2 = 0$$

مع اتخاذ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ يكون لدينا $\bar{X}_1^T X_2 = 0$ أو X_1 ، X_2 متعامدان .

١٥ — ٣٩ (أ) وضح بمثال نتائج المسائل ١٥ — ٣٧ ، ١٥ — ٣٨ .

(ب) إذا كان لمصفوفة ما قيم ذاتية حقيقية ، هل يجب أن تكون هيرميتية ؟ اشرح ماتقول .

الحل : (أ) المصفوفة A فى المسألة ١٥ — ٣٥ حقيقية ومتماثلة وبذلك فهى هيرميتية ،وكما هو موضح فى تلك المسألة فإن القيم الذاتية كلها حقيقية أيضاً المتجهات الذاتية .

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

تكون متعامدة على التبادل ومن السهل التحقق من ذلك .

(ب) يمكن أن يكون للمصفوفة قيم ذاتية حقيقية دون أن تكون هيرميتية . انظر على سبيل المثال ، المصفوفة فى المسألة ١٥ — ٣٣ .

١٥ — ٤٠ حقق نظرية كايلى هاميلتون ١٥ — ١٤ صفحة ٤٤٧ على المصفوفة : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

الحل : المعادلة المميزة هى :

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{أو} \quad \lambda^2 - 7\lambda + 14 = 0$$

لتحقيق النظرية يجب أن نبين أن المصفوفة A تحقق

$$A^2 - 7A + 14I = 0$$

حيث A حلت محل λ فى المعادلة المميزة ، $14I$ حلت محل الحد الثابت (فى هذه الحالة 14) ، 0 حلت محل O لدينا

$$A^2 - 7A + 14I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 14\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & -14 \\ 7 & -28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

كما هو مطلوب .

١٥ — ٤١ حقق النظرية ١٥ — ١٥ صفحة ٤٤٧ بتحويل المصفوفة فى المسألة ١٥ — ٣٣ إلى الصيغة القطرية .

الحل : المتجهات الذاتية للمصفوفة المذكورة فى المسألة ١٥ – ٣٣ هى أعمدة المصفوفة :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

كما هو مبين فى المسألة ١٥ – ٣٤ حينئذ يكون معكوس B هو

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

وعلى ذلك

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

١٥ – ٤٢ أثبت نظرية ١٥ – ١٥ .

الحل : نثبت النظرية فى حالة مصفوفة من الرتبة الثالثة حيث أن البرهان يكون مماثلا تماماً لأى مصفوفة مربعة . نشير إلى المتجهات الذاتية للمصفوفة A بالأعمدة فى

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

والقيم الذاتية المختلفة المناظرة بالرموز $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. حينئذ من التعريف

$$A\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \lambda_3\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

التى منها

$$AB = A\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \lambda_3 b_{13} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_3 b_{23} \\ \lambda_1 b_{31} & \lambda_2 b_{32} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$= B\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

وعلى ذلك بالضرب فى B^{-1} يكون لدينا كما هو مطلوب

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

١٥ – ٤٣ (أ) بين أن الصيغة التربيعية $2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3 = X^TAX$ حيث

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(ب) أوجد تحويلا خطياً من x_1, x_2, x_3 إلى u_1, u_2, u_3 لكى يختفى حدود حاصل الضرب بالتعارض فى الصيغة التربيعية فى (أ) ومن ثم اكتب الصيغة التربيعية الناتجة فى u_1, u_2, u_3

الحل : (أ) لدينا

$$X^TAX = (x_1 \ x_2 \ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \ x_2 \ x_3)\begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_3 \\ 4x_2 \\ -2x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$$

لاحظ أن معاملات x_1^2 ، x_2^2 ، x_3^2 وهى 2 ، 4 ، 5 تظهر فى القطر الرئيسى بينما نصف معاملات x_jx_k ، $j \neq k$ تظهر كعناصر فى الصف الذى ترتيبه j والعمود الذى ترتيبه k

(ب) يمكن كتابة التحويل الخطى من x_1, x_2, x_3 إلى u_1, u_2, u_3 على الصورة $X = BU$ حيث

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ ، B هى مصفوفة 3×3 . وبذلك يكون لدينا

$$X^TAX = (BU)^TA(BU) = U^T(B^TAB)U \qquad (١)$$

الآن لن يحتوى الطرف الأيمن فى (١) على حدود حاصل ضرب بالتعارض إذا كانت B^TAB مصفوفة قطرية . ومن ذلك نرى أنه إذا كانت $B^T = B^{-1}$ (أى إذا كانت B مصفوفة متعامدة) فإن المسألة تصبح مسألة إيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A . وهذا قد تم إيجاده فى المسألة ١٥ – ٣٥ . نختار B بحيث تكون مصفوفة وحدة المتجهات الذاتية أى :

$$B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

التى نجد منها بسهولة أن $B^T = B^{-1}$ وعلى ذلك فإن B تكون متعامدة ويكون لدينا

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

كما هو مطلوب . ومن ثم (١) تصبح :

$$X^TAX = U^T(B^{-1}AB)U = (u_1 \ u_2 \ u_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1^2 + 4u_2^2 + 6u_3^2$$

التى هى الصيغة التربيعية المطلوبة وتسمى الصيغة القياسية . التحويل من X إلى U هو $X = BU$ ومنه نجد أن :

$$x_1 = \frac{2u_1 + u_3}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = \frac{u_1 - 2u_3}{\sqrt{5}}$$

مسائل اضافية

عمليات بالمصفوفات :

١٥ – ٤٤ (أ) إذا كانت $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ حقق أن

$A(B + C) = AB + AC$ ، $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$ و $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

(ب) أوجد $2A - 3B - C$ ، $(A - 2B)(C + 3B)$ حيث A, B, C هى المصفوفات المذكورة فى (أ)

١٥ – ٤٥ إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = (4 \ \ -2), \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

أوجد (أ) AC (ب) CA (جـ) BC (د) $C^T B^T$ (هـ) $A(B^T + C)$ (و) BB^T

١٥ – ٤٦ إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

أوجد (أ) $C^T A$ (ب) $A^T C$ (جـ) $AA^T BC$

١٥ – ٤٧ إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

أوجد (أ) $(A + B)(A - B)$ (ب) $A^2 - B^2$ (جـ) $AB - BA$ (د) $A^T B + B^T A$

١٥ – ٤٨ أثبت أنه لأى مصفوفة $m \times n$ (أ) $A + B = B + A$ (ب) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (جـ) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ حيث λ أى كمية عددية .

١٥ – ٤٩ أوجد x, y بحيث أن

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

١٥ – ٥٠ إذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين بحيث أن $AB = 0$ أثبت أنه يمكن أن تكون $A \neq 0$ ، $B \neq 0$. هل النتيجة صحيحة بالنسبة لمصفوفات غير مربعة .

١٥ – ٥١ إذا كانت $AB = AC$ هل من الصواب أن تكون $B = C$ اشرح ما تقول .

١٥ – ٥٢ إذا كانت A, B, C أى مصفوفات مربعة من نفس الرتبة أثبت أن : (أ) $A(BC) = (AB)C$ (ب) $A(B + C) = AB + AC$ (جـ) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ وعمم هذه النتائج .

١٥ — ٥٣ **التحويل الخطى** من نظام إحداثيات (x_1, x_2) إلى (y_1, y_2) يعرف على أنه

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

(أ) إذا كان $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ، $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ، بين أنه يمكن كتابة التحويل على الصورة $Y = AX$ (ب) إذا كانت $X = BU$ حيث $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ، $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

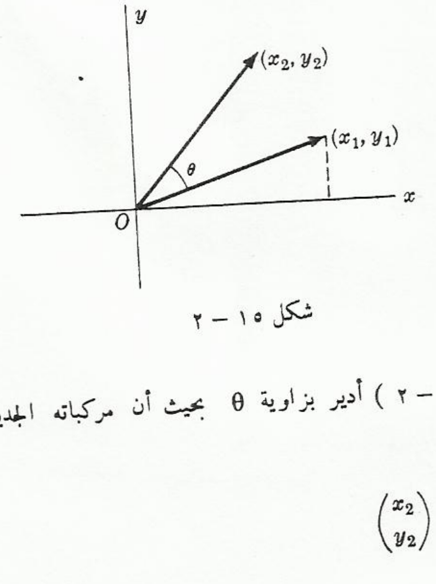
بين أن $x_1 = b_{11}u_1 + b_{12}u_2, \quad x_2 = b_{21}u_1 + b_{22}u_2$ وعلى ذلك احصل على y_1, y_2 بدلالة u_1, u_2 واشرح كيف يمكنك استخدام هذا المفهوم كدافع لتعريف حاصل الضرب AB .

١٥ — ٥٤ عمم فكرة المسألة ١٥ — ٥٣ إلى ثلاثة أبعاد أو أكثر

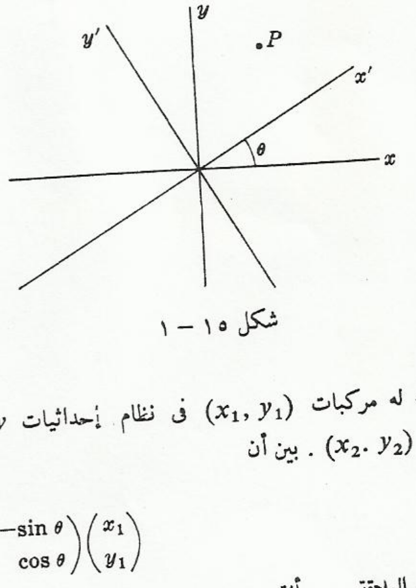
١٥ — ٥٥ بفرض أن إحداثيات P (شكل ١٥ — ١) هى (x, y) بالنسبة إلى نظام إحداثيات xy ، (x', y') بالنسبة إلى نظام إحداثيات $x'\,y'$ والذى يصنع زاوية θ مع نظام الإحداثيات xy (أ) أثبت أن العلاقة بين الإحداثيات أو التحويل من (x,y) إلى (x', y') تعطى بالعلاقة :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(ب) بين أن المصفوفة المربعة فى (أ) تكون متخالفة التماثل .



شكل ١٥ — ٢



شكل ١٥ — ١

١٥ — ٥٦ متجه له مركبات (x_1, y_1) فى نظام إحداثيات xy (شكل ١٥ — ٢) أدير بزاوية θ بحيث أن مركباته الجديدة هى $(x_2 . y_2)$. بين أن

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

اشرح العلاقة مع مسألة ١٥ — ٥٥ .

١٥ — ٥٧ بفرض $A(\theta)$ تشير إلى المصفوفة المربعة فى المسائل ١٥ — ٥٥ أو ١٥ — ٥٦ بين أن (أ) $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1)\,A(\theta_2)$ (ب) $A(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) = A(\theta_1)A(\theta_2)\cdots A(\theta_n)$ (ج) $[A(\theta)]^n = A(n\theta)$ ناقش أهمية هذه النتائج بدلالة التحويلات المذكورة فى المسائل ١٥ — ٥٥ ، ١٥ — ٥٦ .

١٥ – ٥٨ بفرض $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

(أ) بين أن $X^TAX = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k.$ التى تسمى **صيغة تربيعية** فى المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ب) بين أنه إذا كانت A مصفوفة حقيقية متماثلة أى $a_{jk} = a_{kj}$ فإن

$$X^TAX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots$$

والتى تسمى **صيغة تربيعية متماثلة** . (جـ) ماذا تصبح الصيغة التربيعية . إذا كانت A متخالفة التماثل ؟

١٥ – ٥٩ اكتب الصيغ التربيعية (أ) $4x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$ ، (ب) $x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ بدلالة المصفوفات .

١٥ – ٦٠ إذا كانت A هيرميتية أو هيرميتية متخالفة فإن الصيغة التربيعية $\bar{X}^TAX$ تسمى الصيغ الهيرميتية أو الهيرميتية المتخالفة على الترتيب .
أثبت مع كل اختيار معين للمتغيرات X فإن (أ) قيمة الصيغة الهيرميتية تكون دائماً حقيقية (ب) قيمة الصيغة الهيرميتية المتخالفة تكون إما صفراً أو تخيلية بحتة .

١٥ – ٦١ أثبت أن أى مصفوفة مربعة C يمكن أن تكتب على الصورة $A + B$ حيث A هيرميتية ، B هيرميتية متخالفة .

١٥ – ٦٢ إن مفهوم المصفوفة التى عناصرها أعداد حقيقية أو مركبة يمكن امتداده إلى تلك التى تكون عناصرها ذاتها مصفوفات فى هذه الحالة تسمى العناصر **مصفوفات فرعية** ويمكن عمل قواعد للجمع والضرب . . . . الخ مناظرة لتلك التى ذكرت على صفحات ٤٠٣ – ٤٠٦ . فإذا كانت مثلا $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ حيث العناصر مصفوفات . أثبت أن :

(أ) $$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

(ب) $$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

بفرض أن المصفوفات الفرعية متوافقة .

محددات :

١٥ – ٦٣ أوجد قيمة المحددات

(أ) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (جـ) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & b \\ b & 1 & a \end{vmatrix}$

١٥ – ٦٤ أوجد قيمة (أ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$

١٥ – ٦٥ عبر عن كل مما يأتى فى صورة محدد واحد وحقق النتيجة

(أ) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

١٥ – ٦٦ وضح كل خطوة فى برهان مسألة ١٥ – ٧ وذلك بالرجوع إلى محدد المسألة ١٥ – ٦٤ (أ).

١٥ – ٦٧ أثبت نظرية ١٥ – ١ ووضح بمثال.

١٥ – ٦٨ مصفوفة ثلاثية كل عناصرها الواقعة فوق (أو تحت) القطر الأساسى أصفار. أثبت أن محدد $A = 0$.

١٥ – ٦٩ إذا كانت A ، B هما مصفوفتا مسألة ١٥ – ٥٠ أثبت أنه على الأقل يكون أحدهما مفرداً.

١٥ – ٧٠ أثبت نظرية ١٥ – ٢ صفحة ٤٤٣ ووضح بمثال.

١٥ – ٧١ أثبت نظرية ١٥ – ٣ صفحة ٤٤٣ ووضح بمثال (تنويه: استخدم المسألة ١٥ – ٧).

١٥ – ٧٢ (أ) بين أن:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

(ب) بتحويل محدد الرتبة الرابعة فى (أ) باستخدام النظرية ١٥ – ٧ صفحة ٤٤٤ بين أنه يساوى

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

وبذلك أثبت نظرية ١٥ – ٨ صفحة ٤٤٤ لمصفوفة 2×2.

١٥ – ٧٣ عمم المسألة ١٥ – ٧٢ وبذلك أثبت النظرية ١٥ – ٨ لأى مصفوفة مربعة من أى رتبة.

١٥ – ٧٤ وضح نظرية ١٥ – ٩ صفحة ٤٤٤ بمثال.

١٥ – ٧٥ أثبت نظرية ١٥ – ١٠ صفحة ٤٤٤.

معكوس المصفوفة:

١٥ – ٧٦ أوجد معكوس كل من المصفوفات الآتية ثم تحقق من النتائج:

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(د) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (هـ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

١٥ – ٧٧ (أ) أثبت أنه إذا كان $AB = I$ فإن $B = A^{-1}$. استخدم هذه النتيجة مباشرة لإيجاد معكوس المصفوفات الآتية:

(أ) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(تنويه: افرض فى (أ) أن $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ وأوجد $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$)

١٥ – ٧٨ أثبت أن $(A^{-1})^{-1} = A$ حيث A هى مصفوفة غير مفردة ووضح بمثال:

١٥ ـ ٧٩ هل من الصواب إذا كان محدد $(A) \neq 0$ أن يكون (أ) $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}$ (ب) $(A^m)^n = (A^n)^m = A^{mn}$?
اعط تبريراً لبياناتك .

١٥ ـ ٨٠ أثبت أن $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ ثم عمم هذه النظرية .

١٥ ـ ٨١ ناقش أهمية معكوس المصفوفة مع إشارة خاصة إلى (أ) المسألة ١٥ ـ ٥٣ (ب) المسائل ١٥ ـ ٥٥ ، ١٥ ـ ٥٦ .

مصفوفات متعامدة ووحدية ، متجهات متعامدة :

١٥ ـ ٨٢ بين أن المصفوفات (أ) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ متعامدة .

١٥ ـ ٨٣ بين أن المصفوفات (أ) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \cos\phi & i\sin\phi \\ i\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \cos\phi & -i\sin\phi & 0 \\ -i\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ وحدية .

١٥ ـ ٨٤ حدد الصيغة العامة التى من : (أ) الرتبة 2 (ب) الرتبة 3 لمصفوفة مربعة وحدية من الرتبة الثانية .

١٥ ـ ٨٥ إذا كانت A مصفوفة وحدية أثبت أن محدد $(A) = e^{i\alpha}$ لثابت ما α وضح بمثال .

١٥ ـ ٨٦ (أ) بين أن المتجهات $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ متعامدة على التبادل (ب) عين من المتجهات المذكورة فى (أ) فئة من المتجهات القياسية المتعامدة على التبادل .

١٥ ـ ٨٧ أوجد وحدة المتجهات التى تكون متعامدة مع كل من المتجهات $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

١٥ ـ ٨٨ إذا كانت $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ متعامدة على التبادل ، أثبت أن المصفوفة $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ تكون متعامدة . هل يمكنك الوصول إلى نتيجة مناظرة فى حالة مصفوفة وحدية .

مجموعات من معادلات خطية :

١٥ ـ ٨٩ حل مجموعات المعادلات :

(أ) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 17 \\ 5x + 3x_2 = 3 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 24 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -6 \end{cases}$ (جـ) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -8 \\ x_2 - 4x_3 = 16 \\ x_3 - 3x_1 = 3 \end{cases}$

١٥ ـ ٩٠ التيارات I_1, I_2, I_3, I_4 فى شبكة كهربائية تحقق مجموعة المعادلات :

$$\begin{cases} 3I_1 + 2I_3 - I_4 = 60 \\ 2I_1 - I_2 + 4I_3 = 160 \\ 4I_2 + I_3 - 2I_4 = 20 \\ 5I_1 - I_2 - 2I_3 + I_4 = 0 \end{cases}$$

أوجد I_3 .

١٥ - ٩١ صنف كلا من مجموعات المعادلات الآتية حسب ما إذا كان **أولا** : لها حل واحد . **ثانياً** : غير متآلفة . **ثالثاً** : غير مستقلة . عين الحلول حيثما توجد .

(أ)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

(جـ)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 7x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

(د)
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 9x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

(هـ)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 21 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -17 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

١٥ - ٩٢ لأى قيمة أو قيم للمقدار k يكون لمجموعة المعادلات

$$\begin{cases} 2x_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ kx_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

حلول غير الحل الصفرى . عين بعض هذه الحلول .

١٥ - ٩٣ إذا أعطيت مجموعة المعادلات
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$
بين أنه يمكن التعبير عن أى اثنين من x_1, x_2, x_3 بدلالة المتغير المتبقى وبذلك يكون لدينا عدد لانهائى من الحلول .

١٥ - ٩٤ إذا أعطيت مجموعة المعادلات
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 6 \end{cases}$$
بين هل من الممكن التعبير عن أى اثنين من x_1, x_2, x_3 بدلالة المتغير المتبقى .

١٥ - ٩٥ ابحث لكل من المجموعات التالية عن حلول ممكنة .

(أ)
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = -11 \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(جـ)
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(د)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases}$$

(هـ)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية :

١٥ - ٩٦ أوجد القيم الذاتية و المتجهات الذاتية المناظرة لكل من المصفوفات الآتية :

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -2 & -9 & 5 \\ -5 & -10 & 7 \\ -9 & -21 & 14 \end{pmatrix}$

١٥ - ٩٧ عين فئات الوحدات المتجهة الذاتية المناظرة للمصفوفات المذكورة فى المسألة ١٥ - ٩٦ .

١٥ – ٩٨ (أ) أثبت أنه إذا كانت القيم الذاتية لمصفوفة A هى $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ فإن القيم الذاتية للمصفوفة A^2 هى $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots.$
(ب) عمم النتيجة التى توصلنا إليها فى (أ).

١٥ – ٩٩ أثبت أن القيم الذاتية لمصفوفة هيرميتية متخالفة (أو مصفوفة حقيقية متخالفة التماثل) إما أن تكون صفراً أو تخيلية بحتة.

١٥ – ١٠٠ وضح النتيجة فى المسألة ١٥ – ٩٩ بمثال

١٥ – ١٠١ أثبت أن القيمة المطلقة لكل من القيم الذاتية لمصفوفة وحدية (أو مصفوفة حقيقية متعامدة) تساوى واحداً.

١٥ – ١٠٢ وضح النتيجة التى حصلنا عليها فى المسألة ١٥ – ١٠١ بمثال.

١٥ – ١٠٣ أوجد مصفوفات تحول المصفوفات المذكورة فى المسألة ١٥ – ٩٦ إلى الصيغة القطرية.

١٥ – ١٠٤ أثبت أن القيم الذاتية للمصفوفة A هى نفسها للمصفوفة $B^{-1}AB$ ووضح بمثال.

١٥ – ١٠٥ إذا كان المتجه الذاتى المناظر لقيمة ذاتية معينة لمصفوفة A هو X أثبت أن المتجه الذاتى المناظر لنفس القيمة الذاتية للمصفوفة $B^{-1}AB$ (انظر المسألة ١٥ – ١٠٤) هو $B^{-1}X$ وضح بمثال.

١٥ – ١٠٦ (أ) اكتب الصيغة التربيعية $5x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_2 - 8x_1x_3 + 20x_2x_3$ فى صورة المصفوفة $XTAX$
(ب) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A (جـ) أوجد المصفوفة B ومعادلات التحويل $X = BU$ عندما $U = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ بحيث تختزل الصيغة التربيعية فى (أ) إلى الصيغة القياسية. (د) اكتب الصيغة التربيعية الجديدة.

١٥ – ١٠٧ (أ) أوجد تحويلا يزيل الحد xy من $x^2 + xy + y^2 = 16$ (ب) أعط تفسيراً هندسياً للنتيجة.

١٥ – ١٠٨ ناقش العلاقة بين المسألة ١٥ – ١٠٧ ومسألة إيجاد النهاية العظمى أو الصغرى للمقدار $x^2 + y^2$ تحت الشرط $x^2 + xy + y^2 = 16$ (تنويه : استخدم طريقة مضاعفات لاجرانج).

١٥ – ١٠٩ (أ) ناقش العلاقة بين مسألة إزالة حدود حاصل الضرب بالتعارض فى $5x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_2 - 8x_1x_3 + 20x_2x_3 = 100$ (المسألة ١٥ – ١٠٦) وإيجاد النهاية العظمى أو الصغرى للمقدار $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ تحت هذا القيد. اعط تفسيراً هندسياً. (ب) ماهى المسألة المناظرة لاختزال أى صيغة تربيعية إلى الصورة القياسية.

١٥ – ١١٠ (أ) حقق أن القيم الذاتية للمصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ هى $\lambda = 1, 1, 2$

(ب) بين أن المتجه الذاتى المناظر للقيمة $\lambda = 2$ هو $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ وأنه يوجد متجهان ذاتيان مستقلان خطياً وهما $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ يناظران القيمة الذاتية $\lambda = 1$.

(جـ) هل يمكن استخدام نظرية ١٥ – ١٥ لتحويل المصفوفة فى (أ) إلى الصيغة القطرية ؟ اعط تبريراً لإجابتك.

١٥ – ١١١ اختزل $4x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3$ إلى الصيغة القياسية.

١٥ – ١١٢ اشرح كيف تختزل مصفوفة هيرميتية إلى الصورة القطرية ووضح بمثال.

١٥ – ١١٣ اشرح كيف تختزل صيغة هيرميتان التربيعية (انظر المسألة ١٥ – ٦٠) إلى الصيغة القياسية ووضح بمثال.

١٥ – ١١٤ (أ) أثبت أن مجموع العناصر القطرية لأى مصفوفة مربعة أى الأثر يكون مساوياً لمجموع القيم الذاتية للمصفوفة .

(ب) وضح باستخدام المصفوفات المذكورة فى المسائل ١٥ – ٣٣ ، ١٥ – ٣٥ ، ١٥ – ٩٦ (جـ) هل هناك علاقة بين الأثر لمصفوفة A والمصفوفة $B^{-1}AB$ وضح إجابتك .

١٥ – ١١٥ (أ) حقق نظرية كايلى هاميلتون لمصفوفة من الرتبة الثالثة .

(ب) أثبت نظرية كايلى هاميلتون لأى مصفوفة من رتبة n .

أجوبة المسائل الاضافية

١٥ – ٤٩ $x = -33/5,\ y = -26/5$

١٥ – ٧٦ (أ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (هـ) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

١٥ – ٧٧ (ب) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

١٥ – ٨٩ (أ) $x_1 = 3,\ x_2 = -4$ (ب) $x_1 = 4,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$ (جـ) $x_1 = -2,\ x_2 = 4,\ x_3 = -3$

١٥ – ٩٠ 40

١٥ – ٩١ (أ) غير متآلفة (ب) لها حل وحيد $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -4$

(جـ) لها حل صفرى فقط $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ (د) غير مستقلة (هـ) غير مستقلة ولها حلول غير الحل الصفرى .

١٥ – ٩٦ (أ) $3, 4;\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ب) $0, 5;\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (جـ) $5, 3 \pm 4i;\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$

(د) $1, -1, 2;\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

١٥ – ١٠٦ (أ) $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 6 & -2 & 10 \\ -4 & 10 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (ب) $5, 9, -15\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(جـ) $x_1 = \frac{1}{3}(-2u_1 + 2u_2 + u_3),\ x_2 = \frac{1}{3}(u_1 + 2u_2 - 2u_3)$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$x_3 = \frac{1}{3}(2u_1 + u_2 + 2u_3)$

(د) $6u_1^2 + 9u_2^2 - 15u_3^2$