الفصل الخامس عشر

المصفوفات

تعريف المصفوفة :

المصفوفة من رتبة $m \times n$ أو m فى n هى مجموعة من الأعداد المرتبة فى صورة مستطيل مكون من m من الصفوف ، n من الأعمدة ويمكن كتابتها على الصورة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (١)$$

أى عدد a_{jk} فى هذه المصفوفة يسمى **عنصرا** . الدليل السفلى j ، k يشير على الترتيب إلى الصف والعمود فى المصفوفة التى يظهر فيها العنصر .

سوف نشير عادة إلى المصفوفة بحرف مثل A كما فى (١) أو بالرمز (a_{jk}) الذى يبين عنصراً عاماً .

المصفوفة التى تحتوى فقط على صف واحد تسمى **مصفوفة صف** (**أو متجه صف**) بينما المصفوفة التى تحتوى فقط على عمود واحد تسمى **مصفوفة عمود** (**أو متجه عمود**) . إذا كان عدد الصفوف m وعدد الأعمدة n متساويين فإنه يقال للمصفوفة أنها **مصفوفة مربعة** من رتبة $n \times n$ أو باختصار n . يقال للمصفوفة إنها **مصفوفة حقيقية** أو **مصفوفة مركبة** وفقاً ما إذا كانت عناصرها أعداد حقيقية أو تخيلية .

بعض التعاريف الخاصة والعمليات التى تتضمن مصفوفات :

١ – **تساوى المصفوفات** : تكون المصفوفتان $A = (a_{jk})$ ، $B = (b_{jk})$ اللتان من نفس الرتبة (لها أعداد متساوية من الصفوف والأعمدة) **متساويتين** إذا وفقط إذا كان

٢ – **جمع المصفوفات** : إذا كان $A = (a_{jk})$ ، $B = (b_{jk})$ لها نفس الرتبة فإننا نعرف **مجموع** A ، B على أنه

$$A + B = (a_{jk} + b_{jk})$$

مثال (١) إذا كان : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ فإن

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1-5 & 4+1 \\ -3+2 & 0+1 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن قوانين التبادل والترافق للجمع تتحقق مع المصفوفات أى أنه للمصفوفات A, B, C التى من نفس الرتبة .

$$A + B = B + A, \qquad A + (B + C) = (A + B) + C \qquad (٢)$$

٣ – **طرح المصفوفات** : إذا كان $A = (a_{jk})$, ، $B = (b_{jk})$ لها نفس الرتبة فإننا نعرف **الفرق** بين A ، B على أنه

$$A - B = (a_{jk} - b_{jk})$$

مثال ٢ : إذا كان A ، B مصفوفتا مثال (١) فإن

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & 1+5 & 4-1 \\ -3-2 & 0-1 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

٤ — **ضرب المصفوفة فى عدد** . إذا كان $A = (a_{jk})$ ، λ أى عدد (أو كمية عددية) فإننا نعرف **حاصل ضرب** A فى λ على أنه $\lambda A = A\lambda = (\lambda a_{jk})$

مثال ٣ : إذا كانت A هى المصفوفة فى مثال (١) ، $\lambda = 4$ فإن

$$\lambda A = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 16 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

٥ — **ضرب المصفوفات** : إذا كان $A = (a_{jk})$ مصفوفة من رتبة $m \times n$ بينما $B = (b_{jk})$ مصفوفة من رتبة $n \times p$ فإننا نعرف $A.B$ أو AB وهو **حاصل ضرب** A ، B على أنه المصفوفة $C = (c_{jk})$ حيث

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk} \qquad (٣)$$

حيث C من رتبة $m \times p$.

لاحظ أن حاصل ضرب المصفوفات يعرف إذا وفقط إذا كان عدد الأعمدة فى A هو نفس عدد الصفوف فى B . مثل هذه المصفوفات تسمى أحياناً **متوافقة** .

مثال ٤ : نفرض $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ، $D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ فإن

$$AD = \begin{pmatrix} (2)(3)+(1)(2)+(4)(4) & (2)(5)+(1)(-1)+(4)(2) \\ (-3)(3)+(0)(2)+(2)(4) & (-3)(5)+(0)(-1)+(2)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 17 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$$

لاحظ أنه بصفة عامة $AB \neq BA$ أى أن قانون التبادل فى حالة ضرب المصفوفات لا يتحقق بصفة عامة . بينما تتحقق قوانين الترافق والتوزيع .

أى أن

$$A(BC) = (AB)C, \quad A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA \qquad (٤)$$

يمكن ضرب المصفوفة A فى نفسها إذا وفقط إذا كانت المصفوفة مربعة . وفى مثل هذه الحالة يمكن كتابة حاصل الضرب $A.A$ فى الصورة A^2 . بالمثل يمكن تعريف قوى المصفوفة المربعة أى $A^3 = A \cdot A^2$ ، $A^4 = A \cdot A^3$ ...... الخ .

٦ — **مدور المصفوفة** : إذا بادلنا الصفوف والأعمدة لمصفوفة A فإن المصفوفة الناتجة تسمى مدور المصفوفة A ويشار إليها بالصورة A^T . بالرموز إذا كانت $A = (a_{jk})$ فإن $A^T = (a_{kj})$

مثال ٥ : مدور المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ هو

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

يمكننا أن نثبت أن $(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^T)^T = A$ (٥)

٧ ـ **المصفوفات المتماثلة والمتخالفة التماثل** : يقال للمصفوفة المربعة A أنها **متماثلة** إذا كان $A^T = A$ **ومتخالفة التماثل** إذا كان $A^T = -A$.

مثال ٦ : المصفوفة $E = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ **متماثلة** بينما $F = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **متخالفة التماثل** .

أى مصفوفة حقيقية مربعة (أى مصفوفة تحتوى على عناصر حقيقية) يمكن دائماً التعبير عنها كمجموع مصفوفة حقيقية متماثلة ومصفوفة حقيقية متخالفة التماثل .

٨ ـ **المرافق المركب لمصفوفة** : إذا استبدل بكل العناصر a_{jk} من مصفوفة A المرافق المركب لها $\bar{a}_{jk}$ فإن المصفوفة التى نحصل عليها تسمى **المرافق المركب** للمصفوفة A ويشار إليها بالرمز $\bar{A}$.

٩ ـ **المصفوفات الهيرميتية والهيرميتية المتخالفة** : المصفوفة المربعة A ، التى تتساوى مع المرافق المركب لمدورها ، أى إذا كان $A = \bar{A}^T$ فإن A تسمى **هيرميتية** . إذا كان $A = -\bar{A}^T$ ، تسمى **هيرميتية متخالفة** . إذا كانت A حقيقية فإنها تتحول إلى متماثلة ، متماثلة متخالفة ، على الترتيب .

١٠ ـ **القطر الرئيسى وأثر المصفوفة** : إذا كانت $A = (a_{jk})$ هى مصفوفة مربعة فإن القطر الذى يحتوى كل العناصر a_{jk} حيث $j = k$ يسمى **القطر الرئيسى أو الأساسى** ، ومجموع هذه العناصر يسمى **أثر المصفوفة** .

مثال ٧ : القطر الرئيسى أو الأساسى للمصفوفة :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

مبين بالتظليل وأثر المصفوفة يساوى $5 + 1 = 2 = 8$

المصفوفة التى فيها $a_{jk} = 0$ عندما $j \neq k$ تسمى **مصفوفة قطرية** .

١١ ـ **مصفوفة الوحدة** : المصفوفة المربعة التى فيها كل عناصر القطر الرئيسى « تساوى ١ بينما باقى العناصر تساوى صفراً » ، تسمى **مصفوفة الوحدة** ويشار إليها بالرمز I . خاصية هامة للمصفوفة I هى أن :

$$AI = IA = A, \quad I^n = I, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (٦)$$

وتلعب مصفوفة الوحدة دوراً فى جبر المصفوفات مشابهاً للدور الذى يلعبه الرقم واحد فى الجبر العادى .

١٢ ـ **المصفوفة الصفرية أو المنعدمة** : المصفوفة التى كل عناصرها تساوى صفر ، تسمى **المصفوفة المنعدمة أو الصفرية** وعادة يشار إليها بالرمز O أو باختصار O . لأى مصفوفة A لها نفس الرتبة مثل O يكون لدينا

$$A + 0 = 0 + A = A \qquad (٧)$$

أيضاً إذا كانت A ، 0 مصفوفتين مربعتين ، فإن

$$A0 = 0A = 0 \qquad (٨)$$

وتلعب المصفوفة الصفرية دوراً فى جبر المصفوفات مشابها للدور الذى يلعبه الرقم صفر فى الجبر العادى .

المحـــددات :

إذا كانت المصفوفة فى (١) مصفوفة مربعة فإنه يرافق A عدد يشار إليه بالرمز

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (٩)$$

يسمى **محدد** A من **رتبة** n ويكتب محدد (A) . لكى نعرف قيمة المحدد فإننا نقدم المفاهيم الآتية :

١ – المحددة الصغرى : إذا أخذنا أى عنصر a_{jk} من Δ نجد أنه يترافق مع محدد جديد من رتبة $(n-1)$ نحصل عليه بإزالة كل عناصر الصف الذى ترتيبه j والعمود الذى ترتيبه k ويسمى **المحددة الصغرى للعنصر** a_{jk} .

مثال ٨ : المحددة الصغرى المناظرة للعنصر 5 فى الصف الثانى والعمود الثالث من محدد الرتبة الرابعة

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{هو} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

والذى نحصل عليه بحذف العناصر المظللة .

٢ – **المعامل المرافق :** إذا ضربنا المحددة الصغرى للعنصر a_{jk} فى $(-1)^{j+k}$ فإن النتيجة تسمى **المعامل المرافق للعنصر** a_{jk} ويشار إليه بالرمز A_{jk} .

مثال ٩ : المعامل المرافق المناظر للعنصر 5 لمحدد مثال ٨ هو $(-1)^{2+3}$ من المرات المحددة الصغرى أو

$$-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

ومن ثم تعرف قيمة المحدد على أنها مجموع حاصل ضرب عناصر أى صف (أو عمود) فى المعامل المرافق المناظر ويسمى مفكوك لابلاس

$$\text{محدد } A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} \qquad (١٠)$$

يمكننا أن نبين أن هذه القيمة لاتعتمد على الصف (أو العمود) المستخدم (انظر المسألة ١٥ – ٧) .

نظريات على المحددات :

نظرية ١٥ – ١ : قيمة المحدد لا تتغير إذا تبودلت الصفوف والأعمدة ، بالرموز محدد (A) = محدد (A^T) .

نظرية ١٥ – ٢ : إذا كانت عناصر أى صف (أو عمود) تساوى صفراً فيما عدا عنصراً واحداً فإن قيمة المحدد تساوى حاصل ضرب ذلك العنصر فى معاملة المرافق . بصفة خاصة إذا كانت كل عناصر صف (أو عمود) تساوى صفراً فإن المحدد يساوى صفراً .

نظرية ١٥ – ٣ : تبادل أى صفين (أو عمودين) يغير إشارة المحدد .

نظرية ١٥ – ٤ : إذا ضربت كل عناصر أى صف (أو عمود) فى عدد فإن المحدد يتضاعف أيضاً بقدر هذا العدد .

نظرية ١٥ — ٥ : إذا كان أى صفين (أو عمودين) متساويين أو متناسبين فإن المحدد يساوى صفراً .

نظرية ١٥ — ٦ : إذا عبرنا عن عناصر كل صف (أو عمود) كمجموع حدين فإنه يمكن التعبير عن المحدد كمجموع محددين لهما نفس الرتبة .

نظرية ١٥ — ٧ : إذا ضربنا عناصر أى صف (أو عمود) فى عدد وجمعناها على العناصر المناظرة لأى صف آخر (أو عمود) فإن قيمة المحدد لا تتغير .

نظرية ١٥ — ٨ : إذا كانت A ، B مصفوفتين مربعتين من نفس الرتبة فإن

$$\text{محدد } (AB) = \text{محدد } (A) \,.\, \text{محدد } (B) \qquad (١١)$$

نظرية ١٥ — ٩ : مجموع حاصل ضرب عناصر أى صف (أو عمود) فى المعامل المرافق لأى صف آخر (أو عمود) يساوى صفراً . بالرموز .

$$\sum_{k=1}^{n} a_{qk} A_{pk} = 0 \quad \text{أو} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{kq} A_{kp} = 0 \quad \text{إذا كان} \quad p \neq q \qquad (١٢)$$

إذا كانت $p = q$ فإن المجموع يساوى محدد (A) وذلك من (١٠)

نظرية ١٥ — ١٠ : نفرض أن $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_n$ تمثل متجهات صف (أو متجهات عمود) لمصفوفة مربعة A من رتبة n . إن محدد $(A) = 0$ إذا وفقط إذا كان هناك ثوابت (كميات عددية) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ليست كلها أصفار بحيث يكون

$$\lambda_1 \upsilon_1 + \lambda_2 \upsilon_2 + \cdots + \lambda_n \upsilon_n = O \qquad (١٣)$$

حيث O هى مصفوفة الصف الصفرية أو المنعدمة . إذا تحقق الشرط (١٣) فإننا نقول أن المتجهات $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$ **غير مستقلة خطياً** . خلاف ذلك فإنها تكون **مستقلة خطياً** . تسمى المصفوفة A حيث محدد $(A) = 0$ **مصفوفة مفردة** . إذا كان محدد $(A) \neq 0$ فإن A تكون **مصفوفة غير مفردة** .

من الناحية العملية فإننا نحسب قيمة محدد الرتبة n باستخدام النظرية ١٥ — ٧ على التوالى لإحلال كل العناصر عدا واحد الموجودة فى صف أو عمود بأصفار ثم نستخدم نظرية ١٥ — ٢ للحصول على محدد جديد من رتبة $n - 1$. بالاستمرار بهذا الأسلوب نصل فى النهاية إلى محددات من الرتبة الثانية أو الثالثة التى يمكن حساب قيمتها بسهولة .

مقلوب المصفوفة :

إذا وجد لمصفوفة مربعة معلومة A مصفوفة B ، بحيث $AB = I$ فإن B تسمى **مقلوب** A ويشار إليها بالرمز A^{-1} . النظرية التالية أساسية .

نظرية ١٥ — ١١ : إذا كانت A مصفوفة مربعة غير مفردة من رتبة n (أى محدد $(A) \neq 0$) فإنه يوجد مقلوب وحيد A^{-1} بحيث $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ويمكن التعبير عن A^{-1} بالصورة التالية

$$A^{-1} = \frac{(A_{jk})^T}{\text{محدد } (A)} \qquad (١٤)$$

حيث (A_{jk}) هى مصفوفة من المعاملات المرافقة A_{jk} ، $(A_{jk})^T = (A_{kj})$ هو مدورها . ما يلى يعبر عن بعض خواص المطلوب .

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A \qquad (١٥)$$

المصفوفات الوحدية والمتعامدة :

المصفوفة الحقيقية A تسمى **مصفوفة متعامدة** إذا كان مدورها هو نفس مقلوبها أى إذا كان $A^T = A^{-1}$ أو $A^TA = I$

المصفوفة المركبة A تسمى **مصفوفة وحدية** إذا كان مدور مرافقها المركب هو نفس مقلوبها أى إذا كانت $\bar{A}^T = A^{-1}$ أو $\bar{A}^TA = I$. ويجب أن نلاحظ أن المصفوفة الوحدية الحقيقية هى مصفوفة متعامدة .

المتجهـات المتعـامدة :

فى الفصل الخامس وجدنا أن حاصل الضرب العددى أو النقطى لمتجهين $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ، $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ هو $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ وأن المتجهين يكونان عموديين أو متعامدين إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. ومن وجهة نظر المصفوفات يمكن اعتبار هذه المتجهات أنها متجهات أعمدة مثل

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

التى منها ينتج أن

$$A^TB = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

هذا يدعو إلى تعريف **الضرب العددى لمتجهى عمودين حقيقيين** A ، B على أنه A^TB وأن نقول أن A ، B **متعامدة** إذا كان $A^TB = 0$

ومن المناسب أن نعمم هذا للحالات التى يكون فيها للمتجهات مركبات مركبة ولنتخذ التعريف التالى :

تعريف ١ : يقال لمتجهين ذى عمودين A ، B أنهما **متعامدان** إذا كان $\bar{A}^TB = 0$ ، ويسمى $\bar{A}^TB$ **بالضرب العددى** لكل من A ، B

يجب أن نلاحظ أيضاً ، عندما تكون A **مصفوفة وحدية** ، أن $\bar{A}^TA = 1$ وهذا يعنى أن الضرب العددى للمصفوفة A فى نفسها يساوى 1 أو ما يعادل القول بأن A هو متجه الوحدة . أى أن طوله يساوى ١ . وعلى ذلك فإن متجه العمود الوحدى هو متجه الوحدة ونتيجة لهذه الملاحظات لدينا مايلى :

تعريف ٢ : فئة المتجهات $X_1, X_2 \ldots$ التى تحقق العلاقة

$$\bar{X}_j^T X_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

تسمى **فئة وحدية أو مجموعة من المتجهات الوحدية** أو ، فى الحالة التى تكون فيها المتجهات حقيقية يقال أنها **فئة قياسية متعامدة** أو **فئة متعامدة من الوحدات المتجهة** .

مجموعات من المعادلات الخطية :

إن فئة المعادلات التى على الصورة

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = r_n \end{array}\right\} \qquad (١٦)$$

تسمى مجموعة من m من المعادلات الخطية فى n من المجاهيل $x_1, x_2, ..., x_n$. عندما تكون $r_1, r_1, ..., r_n$ جميعها أصفار فإن المجموعة تكون متجانسة . إذا لم يكن جميعها أصفار فإنه يقال لها أنها غير متجانسة . أى فئة من الأعداد $x_1, x_2, ..., x_n$ التى تحقق (١٦) تسمى حل للمجموعة .

ويمكن كتابة (١٦) فى صورة مصفوفات على النحو التالى :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \qquad (١٧)$$

أو باختصار

$$AX = R \qquad (١٨)$$

حيث A, X, R تمثل المصفوفات المناظرة فى (١٧)

مجموعات من n من المعادلات فى n من المجاهيل ، قاعدة كرامر :

إذا كانت $m = n$ وكانت A مصفوفة غير مفردة حيث يمكن إيجاد A^{-1} فإنه يمكن حل (١٧) أو (١٨) بكتابة

$$X = A^{-1}R \qquad (١٩)$$

حيث يكون للمجموعة حل وحيد .

بصورة أخرى يمكننا التعبير عن المجاهيل $x_1, x_1, \ldots, x_n$ على النحو التالى :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (٢٠)$$

حيث $\Delta =$ محدد (A) والتى يسمى **بمحدد المجموعة** ويعطى بالمعادلة (٩) ، Δ_k حيث $k = 1, 2, \ldots, n$ هو المحدد الذى نحصل عليه من Δ باستبدال العمود الذى ترتيبه k بمتجه العمود R . تسمى القاعدة الموضحة فى (٢٠) **بقاعدة كرامر** .

وهنا يمكن أن تنشأ الحالات الأربع التالية :

الحالة الأولى : $\Delta \neq 0$ ، $R \neq 0$. فى هذه الحالة يكون هناك حل وحيد حيث قد تتساوى بعض قيم x_k بالصفر .

الحالة الثانية : $\Delta \neq 0$ ، $R = 0$. فى هذه الحالة الحل الوحيد هو : $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$ أى $X = 0$ يسمى هذا عادة **بالحل الصفرى** .

الحالة الثالثة : $\Delta = 0$ ، $R = 0$. فى هذه الحالة يكون هناك عدد لانهائى من الحلول غير الحل الصفرى . هذا يعنى أنه يمكن على الأقل الحصول على إحدى المعادلات بدلالة المعادلات الأخرى أى أن المعادلات غير مستقلة خطياً .

الحالة الرابعة : $\Delta = 0$ ، $R \neq 0$. فى هذه الحالة يوجد عدد لانهائى من الحلول إذا وفقط إذا تلاشت جميع المحددات Δ_k فى (٢٠) . وخلاف ذلك لايكون هناك أى حل .

الحالات التى فيها $m \neq n$ سوف ندرسها فى المسائل ١٥ – ٩٣ ، ١٥ – ٩٦ .

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية :

بفرض أن $A = (a_{jn})$ مصفوفة $n \times n$ ، وأن X مصفوفة عمود . فإنه يمكن كتابة المعادلة

$$AX = \lambda X \qquad (٢١)$$

حيث λ عدد على الصورة

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (٢٢)$$

أو

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (٢٣)$$

المعادلة (٢٣) سوف يكون لها حل غير صفرى إذا وفقط إذا كان

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (٢٤)$$

وهذه معادلة كثيرة حدود من درجة n فى λ . تسمى جذور معادلة كثيرة الحدود هذه **بالقيم الذاتية أو القيم المميزة** للمصفوفة A . يناظر كل قيمة ذاتية حل $X \neq 0$ أى حل غير صفرى يسمى **متجهاً ذاتياً أو متجهاً مميزاً** ينتمى للقيمة الذاتية . ويمكن أيضاً كتابة المعادلة (٢٤) فى الصورة :

$$\text{محدد } (A - \lambda I) = 0 \qquad (٢٥)$$

وعادة ماتسمى المعادلة التى تعطى λ بالمعادلة المميزة .

نظريات على القيم الذاتية والمتجهات الذاتية :

نظرية ١٥ — ١٢ : القيم الذاتية لمصفوفة هيرميتيان (أو مصفوفة حقيقية متماثلة) تكون حقيقية . القيم الذاتية لمصفوفة هيرميتيان المتخالفة (أو مصفوفة حقيقية متخالفة التماثل) تكون صفراً أو تخيلية بحته . جميع القيم الذاتية لمصفوفة وحدية (أو مصفوفة حقيقية متعامدة) لها قيمة مطلقة تساوى ١ .

نظرية ١٥ — ١٣ : المتجهات الذاتية التى تنتمى إلى القيم الذاتية المختلفة لمصفوفة هيرميتيان (أو مصفوفة حقيقية متماثلة) تكون متعامدة .

نظرية ١٥ — ١٤ : **(كايلى — هاميلتون)** . إن المصفوفة تحقق معادلتها المميزة (أنظر المسألة ١٥ — ٤٠) .

نظرية ١٥ — ١٥ : **(اختزال المصفوفة إلى الصورة القطرية)** . إذا كان لمصفوفة غير مفردة A قيم ذاتية مختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ حيث المتجهات الذاتية المناظرة مكتوبة فى صورة أعمدة كما فى المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

فإن
$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

أى أن $B^{-1}AB$ والتى تسمى **تحويل** A بالمصفوفة B هى مصفوفة قطرية تحتوى على القيم الذاتية للمصفوفة A فى القطر الرئيسى وعلى أصفار فى المواضع الأخرى نقول أن A **قد تحولت أو اختزلت إلى الصورة القطرية** . انظر المسألة ١٥ – ٤١ .

نظرية ١٥ – ١٦ : (اختزال الصيغة التربيعية إلى الصيغة القياسية).

نفرض أن A مصفوفة حقيقية متماثلة ، مثلا

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32}$$

فإذا كانت $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ فإننا نحصل على **الصيغة التربيعية**

$$X^TAX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}^2x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

يمكن إزالة الحدود الثلاثة الأخيرة التى تسمى حدود حاصل الضرب بالتعارض فى هذه الصيغة التربيعية بوضع $X = BU$ حيث U هو متجه عمود عناصره u_1, u_2, u_3 ، B هى المصفوفة المتعامدة التى تحول A إلى مصفوفة قطرية . الصيغة التربيعية الجديدة فى u_1, u_2, u_3 والتى لا تحتوى على حدود حاصل ضرب بالتعارض تسمى **بالصيغة القياسية** . انظر المسألة ١٥ – ٤٣ ويمكن تعميم ذلك لصيغ هيرميتان التربيعية (انظر المسألة ١٥ – ١١٤) .

التفسير بالمؤثرات للمصفوفات :

يمكن اعتبار المصفوفة A التى رتبتها $n \times n$ على أنها مؤثر أو تحويل يؤثر على متجه عمود X ليعطى AX الذى هو متجه عمود آخر . بهذا التفسير فإن المعادلة (٢١) تبحث عن تلك المتجهات X التى تتحول بالمصفوفة A إلى مضاعفات ثابتة لذاتها (أو إلى متجهات لها نفس الاتجاه ولكن من الممكن أن يكون مقدارها مختلفاً) .

فى الحالة التى تكون فيها المصفوفة A متعامدة فإن التحويل يعبر عن دوران . ويوضح سبب كون القيمة المطلقة لكل القيم الذاتية فى مثل هذه الحالة مساوية للواحد (انظر ١٥ – ١٢) وذلك نظراً لأن الدوران العادى لمتجه لا يغير من مقداره . إن فكرة التحويل كثيراً ما تكون ملائمة جداً فى تفسير كثير من خواص المصفوفات .

مسائل محلولة

عمليات بالمصفوفات :

١٥ – ١ إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

أوجد : (أ) $A + B$ (ب) $A - B$ (جـ) $2A - 3C$ (د) $3A + 2B - 4C$

(هـ) AB (و) BA (ز) $(AB)C$ (ح) $A(BC)$ (ط) $A^T + B^T$ (ى) B^TA^T

الحل : (أ) $A+B = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{pmatrix}$

(ب) $A-B = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$

(جـ) $2A-3C = 2\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3 & -12\\ 6 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -14\\ 14 & 9\end{pmatrix}$

(د)
$$3A+2B-4C = 3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}6 & -3\\ 12 & 9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 4 & -8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4 & -16\\ 8 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -17\\ 24 & 5\end{pmatrix}$$

(هـ) $AB = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(2)(-1)+(-1)(2) & (2)(1)+(-1)(-4)\\ (4)(-1)+(3)(2) & (4)(1)+(3)(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 6\\ 2 & -8\end{pmatrix}$

(و) $BA = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)(2)+(1)(4) & (-1)(-1)+(1)(3)\\ (2)(2)+(-4)(4) & (2)(-1)+(-4)(3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\ -12 & -14\end{pmatrix}$

لاحظ أن $AB \neq BA$ وذلك باستخدام (هـ) ويوضح أن قانون التبادل لحاصل الضرب لايتحقق عامة .

(ز) $(AB)C = \begin{pmatrix}-4 & 6\\ 2 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16 & -22\\ 18 & 16\end{pmatrix}$

(ح) $A(BC) = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 10 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16 & -22\\ 18 & 16\end{pmatrix}$

لاحظ أن $(AB)C = A(BC)$ وذلك باستخدام (ز) يوضح أن قانون الترافق يتحقق مع حاصل الضرب .

(ط) $A^T + B^T = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

لاحظ أن $A^T + B^T = (A+B)^T$ وذلك باستخدام (أ) .

(ى) $B^TA^T = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 2\\ 6 & -8\end{pmatrix}$

لاحظ أن $B^TA^T = (AB)^T$ وذلك باستخدام (هـ) .

١٥ ـ ٢ إذا كانت
$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

بين أن $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

الحل : لدينا
$$A+B = \begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

إذن

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (3)(3)+(0)(-1)+(1)(0) & (3)(0)+(0)(-1)+(1)(0) & (3)(1)+(0)(6)+(1)(3) \\ (-1)(3)+(-1)(-1)+(6)(0) & (-1)(0)+(-1)(-1)+(6)(0) & (-1)(1)+(-1)(6)+(6)(3) \\ (0)(3)+(0)(-1)+(3)(0) & (0)(0)+(0)(-1)+(3)(0) & (0)(1)+(0)(6)+(3)(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

الآن

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -6 & 8 & -1 \\ -7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 11 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -9 & -1 & 11 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

وعلى ذلك

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = (A+B)^2$$

١٥ — ٣ أثبت أن أى مصفوفة مربعة حقيقية يمكن دائماً التعبير عنها كمجموع مصفوفة متماثلة حقيقية ، مصفوفة حقيقية متخالفة التماثل .

الحل : إذا كانت A أى مصفوفة مربعة حقيقية فإن

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^T) + \tfrac{1}{2}(A - A^T)$$

لكن بما أن $(A + A^T)^T = A^T + A = A + A^T$ فإنه ينتج أن $\tfrac{1}{2}(A + A^T)$ متماثلة .

أيضاً بما أن $(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$ فإنه ينتج أن $\tfrac{1}{2}(A - A^T)$ متخالفة التماثل . وبذلك نكون قد أثبتنا النتيجة المطلوبة .

١٥ — ٤ المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ هيرميتية .

الحل : لدينا $A^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ ، $\overline{A^T} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A$ وعلى ذلك فإن A هيرميتية .

١٥ — ٥ أثبت أن مصفوفة الوحدة I ذات الرتبة n يمكن أن تتبادل مع أى مصفوفة مربعة A من رتبة n وأن حاصل الضرب الناتج هو A .

الحل : سوف نوضح البرهان عندما $n = 3$ فى مثل هذه الحالة .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

إذن
$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A$$
$$AI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A$$
أى أن $IA = AI = A$

ويمكن بسهولة أن نمتد بهذه الخاصية عندما $n > 3$.

المحددات :

١٥ ـ ٦ استخدم تعريف المحدد (مفكوك لابلاس) كما هو موضح على صفحة ٤٤٣ لإيجاد قيمة محدد من (أ) الرتبة الثانية . (ب) الرتبة الثالثة .

الحل : (أ) نفرض أن المحدد $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ استخدم عناصر الصف الأول . المعاملات المرافقة المناظرة هى :
$$A_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = a_{22}, \qquad A_{12} = (-1)^{2+1}a_{21} = -a_{21}$$
إذن من مفكوك لابلاس تكون قيمة المحدد هى
$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ونحصل على نفس القيمة باستخدام عناصر الصف الثانى (أو العمود الأول والثانى)

(ب) نفرض أن المحدد هو $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ المعاملات المرافقة لعناصر الصف الأول هى
$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

وبذلك تكون قيمة المحدد هى :
$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ &\quad + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

نفس القيمة نحصل عليها باستخدام عناصر الصف الثانى أو الثالث (أو العمود الأول ، الثانى ، الثالث) .

١٥ ـ ٧ أثبت أن قيمة المحدد تظل كما هى ، بغض النظر عن الصف (أو العمود) الذى نستخدمه فى مفكوك لابلاس .

الحل : اعتبر المحدد $\Delta = (a_{jk})$ ذات الرتبة n . إن النتيجة تكون صحيحة عندما $n = 2$ مسألة (١٥ – ٦) . نستخدم الاستنتاج الرياضى فى البرهان . أى نفترض أنها صحيحة عندما تكون الرتبة $n - 1$ وسوف نبرهن أنها صحيحة عندما تكون الرتبة n . الطريقة هى إيجاد مفكوك Δ باستخدام صفين مختلفين p ، q ثم نبين أن المفكوكين متساويان .

دعنا أولا نوجد مفكوك Δ بعناصر الصف p . حينئذ يكون الحد العام فى المفكوك هو :

$$a_{pk}A_{pk} = a_{pk}(-1)^{p+k}M_{pk} \quad (١)$$

حيث M_{pk} هى المحددة الصغرى المناظرة للمعامل المرافق A_{pk} للعنصر a_{pk} . وبما أن هذه المحددة الصغرى من رتبة $n - 1$ فإنه يمكن استخدام أى صف لإيجاد مفكوكها .

سوف نستخدم الصف q مع الفرض أن $q > p$ علماً بأنه يمكن استخدام أسلوب مماثل عندما $q < p$. يتكون هذا الصف من العناصر a_{qr} حيث $r \neq k$ ويناظر الصف $(q - 1)$ من M_{pk}

الآن إذا كانت $r < k$ فإن a_{qr} تقع فى العمود r من M_{pk} بحيث يكون الحد المناظر فى المفكوك للعنصر a_{qr} هو

$$a_{qr}(-1)^{(q-1)+r}M_{pkqr} \quad (٢)$$

حيث M_{pkqr} هى المحددة الصغرى المناظرة للعنصر a_{qr} فى M_{pk} من (١) و (٢) ينتج أن العنصر العام فى مفكوك Δ هو

$$a_{pk}(-1)^{p+k}a_{qr}(-1)^{q-1+r}M_{pkqr} = a_{pk}a_{qr}(-1)^{p+k+q+r-1}M_{pkqr} \quad (٣)$$

إذا كانت $r > k$ فإن a_{qr} يقع فى العمود $(r - 1)$ وبذلك يكون هناك إشارة ناقص إضافية فى (٣) .

إذا أوجدنا الآن مفكوك Δ بالعناصر التى فى الصف q فإن الحد العام يكون

$$a_{qr}A_{qr} = a_{qr}(-1)^{q+r}M_{qr} \quad (٤)$$

يمكننا إيجاد مفكوك M_{qr} بعناصر الصف p حيث $p < q$. كما سبق إذا كان $r < k$ فإن الحد العام فى مفكوك M_{qr} هو

$$a_{pk}(-1)^{p+(k-1)}M_{pkqr} \quad (٥)$$

من (٤) ، (٥) نرى أن الحد العام فى مفكوك Δ هو

$$a_{qr}(-1)^{q+r}a_{pk}(-1)^{p+k-1}M_{pkqr} = a_{pk}a_{qr}(-1)^{p+k+q+r-1}M_{pkqr} \quad (٦)$$

وهو نفس الحد العام فى (٣) . إذا كان $r > k$ فإن إشارة ناقص إضافية تظهر فى (٦) وهذا يتفق مع الحالة المناظرة عندما $r > k$ وذلك باستخدام المفكوك الأول ، وبذلك نكون قد أثبتنا النتيجة المطلوبة .

بطريقة مماثلة يمكننا أن نثبت أن المفكوك بالأعمدة يعطى نفس النتيجة كما فى حالة المفكوك بالصفوف (نظرية ١٥ – ١ صفحة ٤٤٣) .

١٥ – ٨ أوجد باستخدام مفكوك لابلاس قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(أ) باستخدام عناصر الصف الأول (ب) باستخدام عناصر الصف الثانى .

الحل : (أ) باستخدام عناصر الصف الأول ، المفكوك هو :

$$(3)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(7) - (-2)(14) + (2)(-7) = 35$$

(ب) باستخدام عناصر الصف الثانى ، المفكوك هو :

$$-(1)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \; -(1)(-6) + (2)(-2) - (-3)(11) \; = \; 35$$

١٥ — ٩ أثبت نظرية ١٥ — ٤ صفحة ٤٤٣

الحل : نفرض أن المحدد هو

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (١)$$

لنفرض أننا ضربنا عناصر الصف k فى λ لتعطى المحدد

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \cdots & \lambda a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (٢)$$

بإيجاد مفكوك (١) ، (٢) باستخدام عناصر الصف k نجد على الترتيب :

$$\Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} \qquad (٣)$$

$$\Delta_1 = (\lambda a_{k1})A_{k1} + (\lambda a_{k2})A_{k2} + \cdots + (\lambda a_{kn})A_{kn} \qquad (٤)$$

التى منها $\Delta_1 = \lambda\Delta$ كما هو مطلوب .

١٥ — ١٠ أثبت النظرية ١٥ — ٥ صفحة ٤٤٤ .

الحل : (أ) إذا كان لصفين نفس العناصر فإن قيمة المحدد لاتتغير إذا تبادل هذان الصفان ولكن بناء على النظرية ١٥ — ٣ صفحة ٤٤٣ فإن الإشارة يجب أن تتغير وعلى ذلك $\Delta - = \Delta$ أو $\Delta = 0$

(ب) إذا كانت عناصر صفين متناسبة فإنه يمكن جعلهما متساويين بإخراج ثابت التناسب وحينئذ من (١) ، المحدد يساوى صفراً .

١٥ — ١١ أثبت النظرية ١٥ — ٦ صفحة ٤٤٤

الحل : اكتب المحدد على الصورة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} + b_2 & \cdots & a_{1n} + b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

والذى فيه أمكن التعبير عن كل عنصر من عناصر الصف الأول فى صورة مجموع حدين . فيكون لدينا من مفكوك لابلاس أن

$$\Delta = (a_{11} + b_1)A_{11} + (a_{12} + b_2)A_{12} + \cdots + (a_{1n} + b_n)A_{1n} \qquad (١)$$

حيث $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}$ هى المعاملات المرافقة المناظرة لعناصر الصف الأول . ولكن يمكن كتابة (١) فى الصورة :

$$\Delta = (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) + (b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{1n})$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

وهى الصورة المطلوبة . يمكن إثبات النتيجة باختيار أى صف آخر (أو عمود) .

١٥ ـ ١٢ أثبت النظرية (١٥ ـ ٧) صفحة ٤٤٤ .

الحل : نفرض أننا ضربنا عناصر المحدد $\Delta = (a_{jk})$ الموجودة فى الصف الثانى فى λ وجمعناها إلى عناصر الصف الأول (يمكن استخدام برهان مماثل لأى صفين آخرين أو عمودين) . حينئذ يمكن كتابة المحدد على الصورة :

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & \cdots & a_{1n} + \lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ولكن من المسألة ١٥ ـ ١١ هذا يمكن كتابته على الصورة :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

وبذلك نحصل على النتيجة المطلوبة حيث أن المحدد الثانى يساوى صفراً لأن عناصر الصفين الأول والثانى متناسبة (نظرية ١٥ ـ ٥) .

١٥ ـ ١٣ أوجد قيمة
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

الحل : بضرب عناصر الصف الأول فى $3, 2, -3$ وإضافتها إلى عناصر الصفوف الثانى والثالث والرابع على الترتيب نحصل على :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -8 & 0 & 5 & -17 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \\ 2 & 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

الذى قيمته تساوى قيمة المحدد المعطى وذلك بنظرية ١٥ ـ ٧ لاحظ أن هذا المحدد الجديد فيه ثلاثة أصفار فى العمود الثانى الذى هو بالضبط ماكنا نقصده عندما وقع اختيارنا على الأعداد -3 ، 2 ، 3 فى بداية المسألة .

بضرب كل عنصر فى العمود الثانى فى معامله المرافق نرى أن قيمة المحدد هى :

$$-\begin{vmatrix} -8 & 5 & -17 \\ 5 & -5 & 10 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} -8 & 5 & -17 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

وذلك بإخراج المعامل 5 من الصف الثانى باستخدام نظرية ١٥ ـ ٤

والآن بضرب عناصر الصف الثانى فى 5 ، 1 ـــ والإضافة إلى عناصر الصفين الأول والثالث على الترتيب نجد أن :

$$-5\begin{vmatrix} -3 & 0 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

الذى بإيجاد مفكوكة باتباع عناصر العمود الثانى يعطى

$$(-5)(-1)\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -85$$

١٥ ـ ١٤ حقق نظرية (١٥ ـ ٨) عندما $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

الحل : النظرية تنص على أن محدد (AB) = محدد (A) محدد (B) . وحيث أن

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

فإنها تنص على أن

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 0 \\ 15 & 14 \end{vmatrix}$$

أو

$$(7)(34) = (17)(14)$$

وبما أن هذا صحيح فإن النظرية تكون قد تحققت لهذه الحالة .

١٥ ـ ١٥ بفرض أن $v_1 = (2\ -1\ 3),\ v_2 = (1\ 2\ -1),\ v_3 = (-3\ 4\ -7)$ (أ) بين أن v_1 ، v_2 ، v_3 مستقلة خطياً . (ب) وضح نظرية ١٥ ـ ١٠ صفحة ٤٤٤ بتبيان أن

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

الحل : (أ) يجب أن نبين أنه هناك ثوابت $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ليست جميعها أصفاراً بحيث $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 = (0\ 0\ 0)$ الآن

$$\lambda_1(2\ \ -1\ \ 3) + \lambda_2(1\ \ 2\ \ -1) + \lambda_3(-3\ \ 4\ \ -7) = (0\ \ 0\ \ 0)$$

عندما

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

بفرض أن $\lambda_3 = 1$ مثلا فإن المعادلات تصبح $2\lambda_1+\lambda_2=3$ ، $\lambda_1-2\lambda_2=4$ ، $3\lambda_1 - \lambda_2 = 7$. بحل أى اثنين من هذه المعادلات آنياً نجد أن $\lambda_1 = 2$ ، $\lambda_2 = -1$ وعلى ذلك فإن $\lambda_3 = 1$ ، $\lambda_2 = -1$ ، $\lambda_1 = 2$ تزودنا بالثوابت المطلوبة .

(ب) بضرب عناصر الصف الثانى فى -2 ، 3 وإضافة الناتج إلى الصفين الأول والثالث على الترتيب فإن المحدد المعطى يساوى

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -10 \end{vmatrix} = -(1)\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 10 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

١٥ – ١٦ أثبت نظرية (١٥ – ٩) صفحة ٤٤٤ .

الحل : من التعريف لدينا أن قيمة المحدد

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

حينما توجد المفكوك باتباع عناصر الصف p ، هى

$$\text{محدد } (A) = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}A_{pk} = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + \cdots + a_{pn}A_{pn} \qquad (١)$$

دعنا الآن نستبدل العناصر a_{pq} الموجودة فى الصف p من المحدد A بالعناصر a_{qk} المناظرة الموجودة فى الصف q حيث $p \neq q$ بذلك يتطابق صفان وتتلاشى قيمة المحدد الجديد الذى حصلنا عليه وذلك من نظرية (١٥ – ٥) .

وحيث أن $a_{pk} = a_{qk}$ فإنه يمكن استبدال (١) بالعلاقة :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{qk}A_{pk} = a_{q1}A_{p1} + a_{q2}A_{p2} + \cdots + a_{qn}A_{pn} = 0$$

أى

$$\sum_{k=1}^{n} a_{qk}A_{pk} = 0 \qquad p \neq q \qquad (٢)$$

بالمثل باستخدام الأعمدة بدلا من الصفوف يمكن أن نبين أن

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kq}A_{kp} = 0 \qquad p \neq q \qquad (٣)$$

وإذا كانت $p = q$ فإن (٢) ، (٣) تصبح على الترتيب

$$\sum_{k=1}^{n} a_{pk}A_{pk} = \text{محدد } (A) \qquad (٤)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kp}A_{kp} = \text{محدد } (A) \qquad (٥)$$

مقلوب المصفوفة :

١٥ – ١٧ أثبت أن $A^{-1} = \dfrac{(A_{jk})^T}{\text{محدد } (A)} = \dfrac{(A_{kj})}{\text{محدد } (A)}$

الحل : يجب أن نبين أن $AA^{-1} = I$ حيث I مصفوفة الوحدة . لعمل ذلك اعتبر حاصل الضرب

$$A(A_{jk})^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

الآن من قاعدة ضرب المحددات (ونفس قاعدة الضرب فى المصفوفات) يمكن الحصول على العنصر c_{pq} فى محدد حاصل الضرب بأخذ مجموع حواصل ضرب عناصر الصف q من المحدد الأول فى عناصر العمود p من المحدد الثانى وبذلك يكون لدينا

$$c_{pq} = a_{q1}A_{p1} + a_{q2}A_{p2} + \cdots + a_{qn}A_{pn} = \sum_{k=1}^{n} a_{qk}A_{pk}$$

ولكن من نتيجة مسألة ١٥ — ١٦

$$c_{pq} = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ \text{محدد } (A) & p = q \end{cases}$$

وينتج من ذلك أن

$$A(A_{jk})^T = \begin{vmatrix} \text{محدد}(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \text{محدد}(A) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \text{محدد}(A) \end{vmatrix}$$

وعلى ذلك إذا كان محدد $(A) \neq 0$ فإنه يمكن كتابة هذا فى الصورة :

$$\frac{A(A_{jk})^T}{\text{محدد } (A)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = I$$

وعلى ذلك ينتج أن $AB = I$ حيث

$$B = A^{-1} = \frac{(A_{jk})^T}{\text{محدد }(A)}$$

١٥ — ١٨ (أ) أوجد مقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ب) إختبر الجواب بالضرب المباشر .

الحل (أ) مصفوفة المعاملات المرافقة للمصفوفة A تعطى كالآتى :

$$(A_{jk}) = \begin{pmatrix} 7 & -14 & -7 \\ 6 & -2 & -11 \\ 2 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

مدور هذه المصفوفة هو :

$$(A_{jk})^T = (A_{kj}) = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$

بما أن محدد $(A) = 35$ (انظر المسألة ١٥ — ٨) يكون لدينا

$$A^{-1} = \frac{(A_{jk})^T}{\text{محدد }(A)} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{35} & \frac{2}{35} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{35} & \frac{11}{35} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{11}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix}$$

(ب)

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{35} & \frac{2}{35} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{35} & \frac{11}{35} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{11}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

يمكننا أيضاً أن نبين أن $A^{-1}A = I$ و هذا يعطينا تحقيقاً للمطلوب .

١٥ – ١٩ أثبت أن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

الحل : نفرض أن $X = (AB)^{-1}$ إذن $(AB)X = I$ حيث I هى مصفوفة الوحدة من قانون الترافق هذه تصبح $A(BX) = I$. بالضرب فى A^{-1} يكون لدينا $A^{-1}[A(BX)] = A^{-1}I = A^{-1}$ والتى تصبح باستخدام قانون الترافق مرة أخرى $(A^{-1}A)(BX) = A^{-1}$ أو $I(BX) = A^{-1}$ أى أن $BX = A^{-1}$. بالضرب فى B^{-1} واستخدام قانون الترافق مرة أخرى يكون لدينا $B^{-1}(BX) = B^{-1}A^{-1}$ ، $(B^{-1}B)X = B^{-1}A^{-1}$ $IX = B^{-1}A^{-1}$ أى أن $X = B^{-1}A^{-1}$ كما هو مطلوب .

١٥ – ٢٠ أثبت أنه إذا كانت المصفوفة A غير مفردة فإن $(A^{-1}) = \dfrac{1}{A \text{ محدد}}$

الحل : حيث أن $AA^{-1} = I$ فإن (AA^{-1}) = محدد $I = 1$ ولكن من نظرية ١٥ – ٨ محدد (AA^{-1}) = محدد (A) . محدد (A^{-1}) وعلى ذلك فإن محدد (A^{-1}) . محدد $(A) = 1$ وهــذا يعطى النتيجة المطلوبة .

المصفوفات المتعامدة والوحدوية ، المتجهات المتعامدة :

١٥ – ٢١ بين أن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ متعامدة

الحل : باستخدام المعلومة أن A حقيقية يكون لدينا

$$A^TA = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

وذلك لأن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ وعلى ذلك تكون المصفوفة A متعامدة .

١٥ – ٢٢ بين أن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 & 0 \\ i\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ وحدية

الحل : بما أن المصفوفة A مركبة فإنه يجب أن نبين أن $\bar{A}^TA = I$. لدينا

$$\bar{A}^TA = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 & 0 \\ i\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 & 0 \\ i\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

وعلى ذلك فإن A مصفوفة وحدية .

١٥ – ٢٣ إذا كانت A مصفوفة متعامدة أثبت أن محدد $(A) = \pm 1$.

الحل : إذا كانت A مصفوفة متعامدة فإن $A^TA = I$ وعلى ذلك فن النظرية (١٥ – ٨) صفحة ٤٤٤ لدينا

محدد (A^TA) = محدد (A^T) محدد (A) = محدد $I = 1$ (١)

ولكن محدد (A^T) = محدد (A) وعلى ذلك (١) تصبح

$[\text{محدد } (A)]^2 = 1$ أو محدد $(A) = \pm 1$

١٥ ـ ٢٤ بين أن المتجهات

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

تكون فئة مناسبة متعامدة أو مجموعة من المتجهات .

الحل : بما أن المتجهات حقيقية فيجب أن نبين أن

$$A_j^T A_k = \begin{cases} 1 & j = k \quad \text{إذا كان} \\ 0 & j \neq k \quad \text{إذا كان} \end{cases}$$

إذا كانت $j = k = 1$ يكون لدينا

$$A_1^T A_1 = (\cos\theta \;\; \sin\theta \;\; 0) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

بالمثل إذا كانت $j = k = 2$ ، $j = k = 3$ فإننا نجد أن $A_2^T A_2 = 1$ ، $A_3^T A_3 = 1$ وعلى ذلك فإن A_1, A_2, A_3 هى وحدات متجهة .

لبيان التعامد لأى اثنين من هذه المتجهات اعتبر مثلا $j = 1, k = 2$ حينئذ يكون لدينا

$$A_1^T A_2 = (\cos\theta \;\; \sin\theta \;\; 0) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

بالمثل $A_1^T A_3 = 0$ ، $A_2^T A_3 = 0$ ولذلك فإن المتجهات تكون متعامدة على التبادل . ومن ثم فإن المتجهات تكون مجموعة متعامدة قياسية .

مجموعات من المعادلات الخطية :

١٥ ـ ٢٥ أثبت قاعدة كرامر (٢٠) صفحة ٤٤٦ لحل مجموعة المعادلات (١٦) صفحة ٤٤٥ فى الحالة التى فيها $n = n$.

الحل : يمكن كتابة مجموعة المعادلات على الصورة :

$$\sum_{q=1}^{n} a_{kq} x_q = r_k \qquad k = 1, \ldots, n$$

بالضرب فى A_{kp} والجمع من $k = 1$ إلى n يكون لدينا

$$A_{kp} \sum_{q=1}^{n} a_{kq} x_q = r_k A_{kp}$$

و

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kp} \sum_{q=1}^{n} a_{kq} x_q = \sum_{k=1}^{n} r_k A_{kp}$$

وهذه يمكن كتابتها فى الصورة

$$\sum_{q=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} A_{kp} a_{kq} \right\} x_q = \sum_{k=1}^{n} r_k A_{kp} \qquad (١)$$

الآن باستخدام المعادلات (٣) ، (٥) من المسألة (١٥ – ١٦) يكون لدينا

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kp}a_{kq} = \begin{cases} 0 & q \neq p \\ \text{محدد } (A) & q = p \end{cases}$$

وعلى ذلك (١) تصبح

$$\sum_{k=1}^{n} r_k A_{kp} = [\text{محدد } (A)]\, x_p$$

بحيث إذا كان محدد $\Delta = (A)$

فإن

$$x_p = \frac{\sum_{k=1}^{n} r_k A_{kp}}{\Delta} \qquad p = 1, \dots, n \tag{٢}$$

الآن البسط فى (٢) هو محدد وقد حل فيه المتجه العمود $(r_1, r_2, \dots, r_n)T$ محل العمود الذى ترتيبه p . وبهذا نكون قد أثبتنا قاعدة كرامر .

١٥ – ٢٦ حل المسألة ١٥ – ٢٥ باستخدام مقلوب المصفوفة .

الحل : كما فى صفحة ٤٤٦ تحل المجموعة (١٧) أو (١٨) فى الصورة (١٩) أى

$$X = A^{-1}R$$

$$A^{-1} = \frac{(A_{kj})}{\text{محدد } (A)} = \frac{(A_{kj})}{\Delta}, \qquad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

وبذلك يكون لدينا

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}R = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}r_1 + A_{21}r_2 + \cdots + A_{n1}r_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}r_1 + A_{2n}r_2 + \cdots + A_{nn}r_n \end{pmatrix}$$

ومنها ينتج أن

$$x_p = \frac{A_{1p}r_1 + A_{2p}r_2 + \cdots + A_{np}r_n}{\Delta}$$

وهذا يتفق مع (٢) مسألة ١٥ – ٢٥ .

١٥ – ٢٧ حل مجموعة المعادلات

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

(أ) بقاعدة كرامر

(ب) باستخدام المصفوفات المعكوسة .

الحل : (أ) بقاعدة كرامر

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

حيث محدد المعاملات هو

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 35$$

انظر المسألة (١٥ ـ ٨) . وبحساب قيمة المحددات الأخرى نحصل على الحل $x_1 = 2$ ، $x_2 = -3$ ، $x_3 = -1$.

(ب) يمكن كتابة المعادلات فى صورة مصفوفات كالآتى :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad AX = R \qquad (1)$$

والآن لقد أوجدنا مقلوب المصفوفة الأولى A فى (١) فى مسألة ١٥ ـ ١٨ وعلى ذلك بضرب طرفى المعادلة (١) فى هذه المصفوفة وباستخدام المعلومة أن $A^{-1}A = I$ يكون لدينا

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{35} & \frac{2}{35} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{35} & \frac{11}{35} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{11}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

وعلى ذلك $x_1 = 2$ ، $x_2 = -3$ ، $x_3 = -1$

هندسياً إذا وضعنا $x_1 = x$ ، $x_2 = y$ ، $x_3 = z$ فإن المعادلات تمثل ثلاثة مستويات متقاطعة فى النقطة $(2, -3, -1)$

١٥ ـ ٢٨ حل

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

قاعدة كرامر تعطى

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 7 & 4 & -4 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

حيث

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

وبإيجاد قيمة المحددات نحصل ، حسب القاعدة ، على أن :

$$x_1 = \frac{16}{0}, \quad x_2 = \frac{80}{0}, \quad x_3 = \frac{144}{0} \qquad (1)$$

موضحاً حقيقية الأمر أن هذه المجموعة ليس لها حل .